DISTRIBUSI NORMAL

Pertemuan 3

Distribusi Normal

Pertama kali diperkenalkan oleh Abraham de Moivre (1733). De Moivre menemukan persamaan matematika untuk kurva normal yang menjadi dasar dalam banyak teori statistik inferensial (induktif). Menurutnya suatu peubah acak X dengan rata-rata (μ) dan varians (σ^2) mempunyai fungsi densitas :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Sehingga dengan rata-rata (μ) dan varians (σ^2) yang diketahui, maka seluruh kurva normal dapat diketahui.

Distribusi Normal

Distribusi normal lebih lanjut dikembangkan oleh Piere Simon de Laplace dan kemudian Legendre pada tahun 1805. Sementara Gauss mengklaim telah menggunakan distribusi normal sejak tahun 1794, dan hingga kini distribusi normal sering disebut sebagai distribusi Gauss.

Distribusi normal baku adalah **distribusi normal yang memiliki rata-rata(μ) nol dan simpangan baku (σ) satu**. Grafiknya disebut kurva normal, oleh Jouffret (1872) disebut kurva lonceng/genta (bell curve).

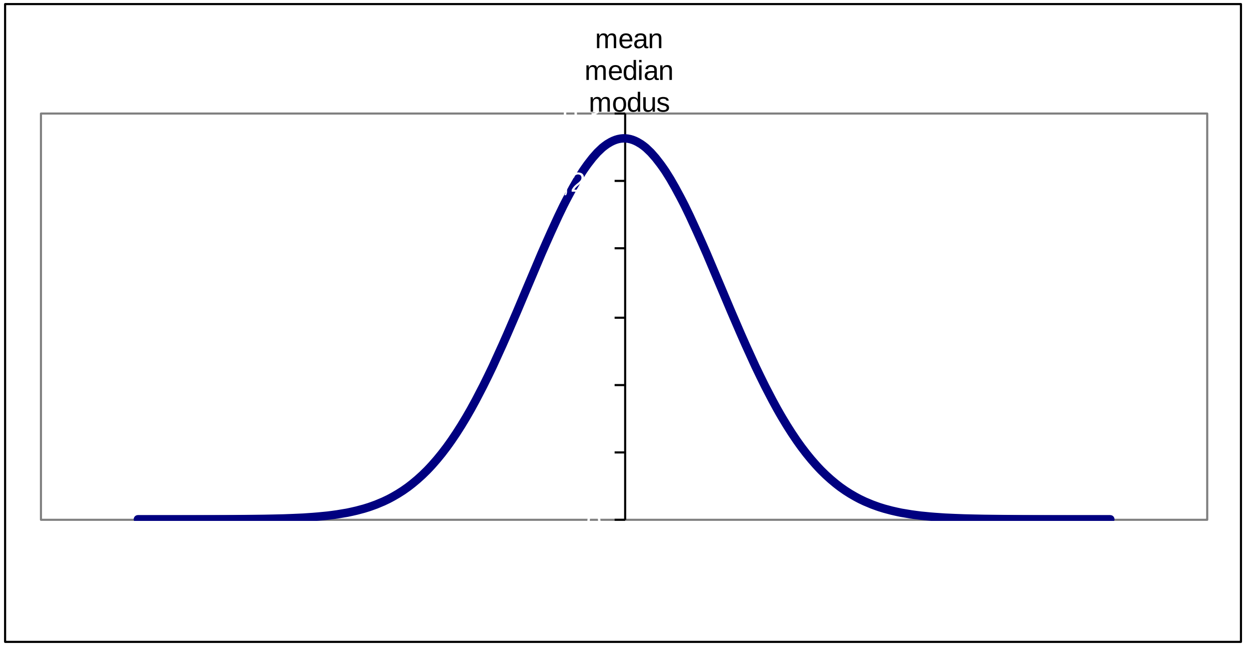
Karakteristik Distribusi Normal

Suatu distribusi data dikatakan berdistribusi normal apabila data berdistribusi simetris, yaitu bila nilai rata-rata, median dan modus sama. Karakteristik distribusi normal antara lain:

1. Grafiknya akan selalu di atas sumbu datar x
2. Bentuknya simetris terhadap x = μ.
3. Mempunyai satu modus (unimodal)
4. Grafiknya mendekati (berasimptot) sumbu datar x
5. Luas daerah grafik selalu sama dengan satu satuan unit persegi

Bentuk kurva yang tidak memiliki kriteria di atas dikenal dengan distribusi tidak simetris (distribusi menceng kekiri atau kekanan)

Bentuk Kurva Normal



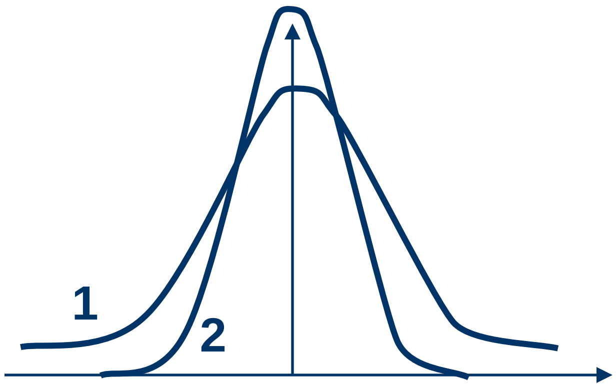
Sifat Distribusi Normal

Sifat-Sifat Distribusi Normal:

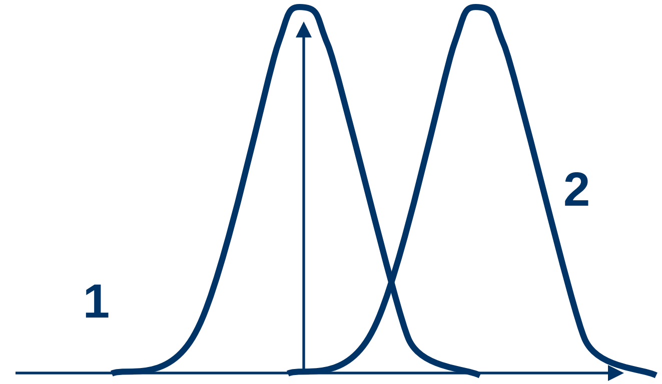
1. Rata-ratanya (mean) μ dan standard deviasinya = σ
2. Mode (maximum) terjadi di $x = \mu$
3. Bentuknya simetrik terhadap $x = \mu$
4. Titik belok tepat di $x = \mu \pm \sigma$
5. Kurva mendekati nol secara asimptotis semakin x jauh dari $x = \mu$
6. Total luasnya = 1

Sifat Distribusi Normal

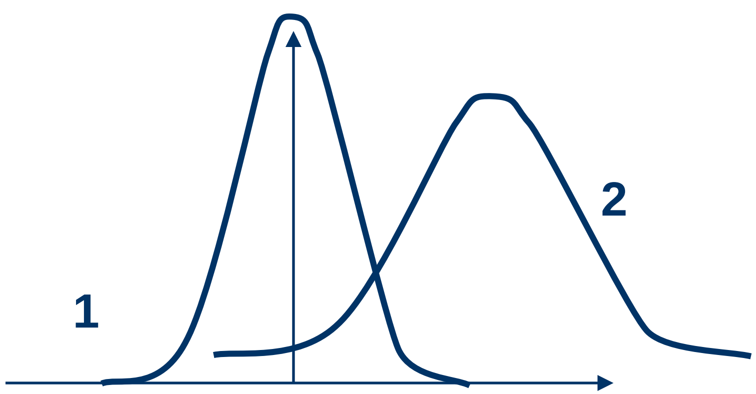
Bentuk distribusi normal ditentukan oleh μ dan σ.



$\mu_1 = \mu_2 \quad \sigma_1 > \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2 \quad \sigma_1 = \sigma_2$



$\mu_1 < \mu_2 \quad \sigma_1 < \sigma_2$

Luas di Bawah Kurva dan Probabilitas

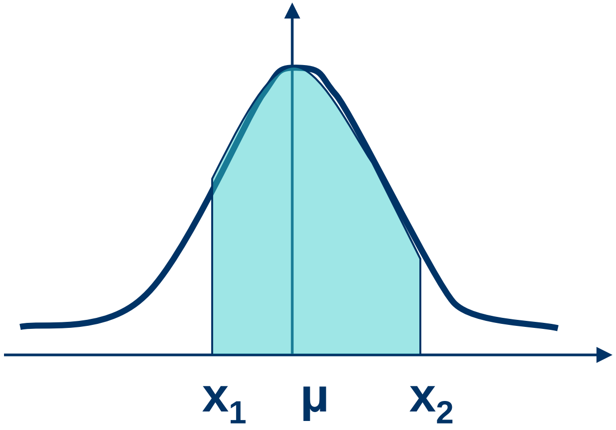
Sebuah kurva normal, sangat penting dalam menghitung peluang sebab daerah yang ada dalam kurva tersebut menunjukkan besarnya peluang.

Dalam kajian statistika, luas daerah yang menunjukkan besarnya peluang itu disusun dalam sebuah daftar (tabel). Daftar (tabel) tersebut adalah daftar (tabel) distribusi normal baku (standar).

Luas di Bawah Kurva dan Probabilitas

$P(x_1<x<x_2)$ = probabilitas variabel random x memiliki nilai antara x_1 dan x_2

$P(x_1<x<x_2)$ = luas di bawah kurva normal antara $x = x_1$ dan $x = x_2$



Oleh karena perhitungan integral normal tersebut sulit, maka disusunlah daftar (tabel) nilai rapat probabilitas. Akan tetapi karena nilai rapat probabilitasnya tergantung pada μ dan σ maka sangatlah tidak mungkin mentabelkan untuk semua nilai μ dan σ

Kurva DIstribusi Normal Standard

Seperti diketahui, **distribusi normal baku (standar)** adalah distribusi normal dengan mean μ = 0 dan standard deviasi σ = 1.

Transformasi $z = \dfrac{x - \mu}{\sigma}$ memetakan distribusi normal

Menjadi distribusi normal baku (standar), sebab distribusi normal dengan variabel z ini memiliki mean = 0 dan standar deviasi = 1.

Transformasi ini juga mempertahankan luas di bawah kurvanya, artinya:

Luas dibawah kurva distribusi normal antara x_1 dan x_2	=	Luas dibawah kurva distribusi normal standard antara z_1 dan z_2

Kurva DIstribusi Normal Standard

Dengan :

$$z_1 = \frac{(x_1 - \mu)}{\sigma} \quad \text{dan} \quad z_2 = \frac{(x_2 - \mu)}{\sigma}$$

Sehingga cukup dibuat tabel distribusi normal baku (standar) komulatif saja!

Pedoman Mencari Luas Di Bawah Kurva Normal

Untuk mempermudah dalam mencari luas di bawah kurva normal, perlu diperhatikan beberapa hal berikut :

1. Hitung luas z hingga dua desimal, misal z = 0,18
2. Gambarkan kurvanya
3. Letakkan harga z pada sumbu datar, lalu tarik garis vertikal hingga memotong kurva.
4. Luas daerah yang tertera dalam daftar adalah daerah antara garis vertikal yang ditarik dari titik harga z tadi dengan garis tegak di titik nol.
5. Dalam daftar distribusi normal baku, harga z pada kolom paling kiri hanya memuat satu desimal dan desimal kedua dicari pada baris paling atas.

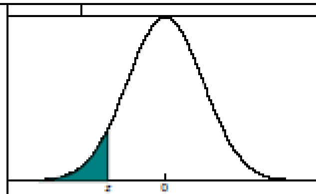
Pedoman Mencari Luas Di Bawah Kurva Normal

6. Dari z kolom paling kiri, maju ke kanan dan dari z pada baris paling atas turun ke bawah, maka diperoleh bilangan yang merupakan daerah yang dicari (biasanya ditulis dalam empat desimal).
7. Karena luas seluruh kurva adalah satu satuan luas persegi, dan kurva simetris di titik 0, maka luas dari garis tegak pada titik nol ke kiri ataupun ke kanan adalah 0,5 satuan luas.
8. Untuk mencari nilai z, jika luasnya diketahui lakukan kebalikan point 6. Misal : diketahui luas daerah di bawah kurva normal = 0,9931 maka dalam tabel dicari angka 0,9931 lalu menuju ke kiri sampai pada kolom paling kiri (kolom z) diperoleh angka 2,4. selanjutnya kembali ke angka 0,9931 lalu menuju ke atas sampai pada baris paling atas, dan diperoleh angka 6. jadi harga z yang diperoleh adalah 2,46.

Tabel Distribusi Normal Standard Kumulatif

Tabel yang dipergunakan :

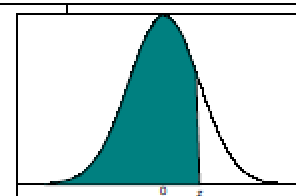
Cumulative Probabilities for the Standard Normal (Z) Distribution



Values in the table correspond to the area under the curve of a standard normal random variable for a value at or below z.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-5.0	0.0000003									
-4.5	0.000003									
-4.0	0.00003									
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

Cumulative Probabilities for the Standard Normal (Z) Distribution



Values in the table correspond to the area under the curve of a standard normal random variable for a value at or below z.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998									
4.0	0.99997									
4.5	0.999997									
5.0	0.9999997									

Contoh :

1). Tentukan nilai z jika diketahui luas daerah di bawah kurva normal sebagai berikut :

a. 0,9082

b. 0,8830

c. 0,0162

d. 0,4129

Jawab :

a. 1,33

b. 1,19

c. – 2,14

d. – 0,22

Contoh:

2). Pergunakanlah tabel distribusi normal standard untuk menghitung luas daerah :

a) Di sebelah kanan z = 1.84

b) Antara z = -1.97 s/d z = 0.86

Jawab.

Ingat bahwa luas yg diberikan dalam tabel distribusi normal komulatif adalah luas dari z= - ∞ s/d z_0 tertentu : $P(z<z_0)$.

a) P(z >1,84) = 1 – P(z ≤1.84) = 1 – 0,9671 = 0,0329

b) P(-1,97< z <0,86) = P(z < 0,86) – P(z < -1,97)

= 0,8051 – 0,0244 = 0,7807

Contoh:

3). Carilah nilai $z = k$ di distribusi normal baku (standar) sehingga

a) $P(z > k) = 0,3015$

b) $P(k < z < -0,18) = 0,4197$

Jawab :

a) $P(z > k) = 0,3015$ berarti $P(z < k) = 1 - P(z > k) = 1 – 0,3015 = 0,6985$

Dari tabel terbaca luas ke kiri = 0,6985 adalah untuk $z = 0,52$.

b) $P(k < z < - 0,18) = P(z < -0,18) – P(z < k) = 0,4197$

$= 0,4286 – P(z < k) = 0.4197$

Jadi $P(z < k) = 0,4286 – 0,4197 = 0,0089$

Dari tabel $z = -2.37$

Contoh:
Luas di bawah kurva normal non standard

4). Variaber X terdistribusi normal dengan mean 50 dan standard deviasi =10. Carilah probabilitas untuk menemukan X bernilai antara 45 dan 62?

Jawab.

Dalam soal ini $\mu = 50$ dan $\sigma = 10$. $x_1 = 45$ dan $x_2 = 62$

Pertama kita mapping (transformasi) x ke z (melakukan normalisasi atau standardisasi):

$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \rightarrow z_1 = (45-50)/10 = -0,5$

$z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma \rightarrow z_2 = (62-50)/10 = 1,2$

Sehingga :

$P(45 < x < 62) = P(-0.5 < z < 1,2)$

$P(-0.5 < z < 1.2) = P(z < 1,2) – P(z < -0,5)$

$= 0,8849 – 0,3085 = 0,5764$

Contoh Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

Diketahui luas dibawah distribusi normal yg diinginkan yang terkait dengan besar probabilitas, ingin dicari nilai variabel random X yg terkait.

5). Misalkan distribusi normal memiliki $\mu = 40$ dan $\sigma = 6$, carilah nilai x_0 sehingga:

a) $P(x < x_0) = 45\%$

b) $P(x > x_0) = 14\%$

Jawab.

a). Kita mulai dengan mencari nilai z yg sama luasnya.

$P(z < z_0) = 45\% = 0,45$ (tabel : 0,4483) $\rightarrow$ dari tabel $z_0 = -0,13$

$z_0 = (x_0 - \mu)/\sigma \rightarrow x_0 = \mu + \sigma . z_0 = 40 + 6(-0,13) = 39,22$

Memakai Distribusi Normal Dalam Arah Kebalikan

b) Kita mulai dengan mencari nilai Z yg sama luasnya.

$P(z > z_0) = 14\% \rightarrow P(z<z_0) = 1- P(z>z_0) = 1- 0,14 = 0,86$

$P(z<z_0) = 0,86$ (tabel: 0,8599) $\rightarrow$ dari tabel $z_0 = 1,08$

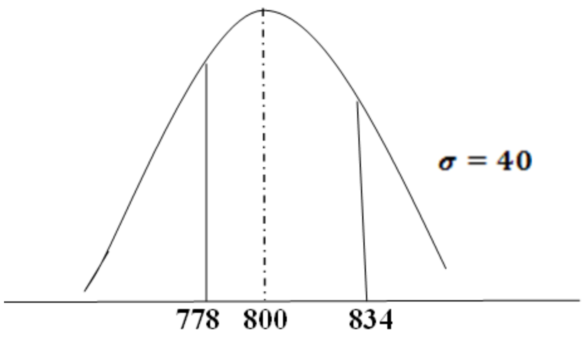
$z_0 = (x_0-\mu)/\sigma \rightarrow x_0 = \mu + \sigma.z_0 = 40 +6(1,08) = 46,48$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

6). Sebuah perusahaan bola lampu pijar mengetahui bahwa umur lampunya (sebelum putus) terdistribusi secara normal dengan rata-rata umurnya 800 jam dan standar deviasinya 40 jam. Carilah probabilitas bahwa sebuah bolam produksinya akan:

a. Berumur antara 778 jam dan 834 jam

b. Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam



Jawab.

Diketahui : $\mu = 800$ dan $\sigma = 40$.

a. $P(778 < x < 834)$

$x_1=778 \rightarrow z_1 = (x_1-\mu)/\sigma = (778 - 800)/40 = -0{,}55$

$x_2=834 \rightarrow z_2 = (x_2-\mu)/\sigma = (834 - 800)/40 = 0{,}85$

$P(778<x<834) = P(-0{,}55 < z < 0{,}85) = P(z < 0{,}85) - P(z < -0{,}55)$

$= 0{,}8023 – 0{,}2912 = 0{,}5111$

Contoh Penerapan Distribusi Normal

b) Berumur kurang dari 750 jam atau lebih dari 900 jam

Diketahui : $\mu = 800$ dan $\sigma = 40$.

$P(x < 750 \text{ atau } x > 900)$

$x_1 = 750 \rightarrow z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma = (750 - 800)/40 = -1{,}25$

$x_2 = 900 \rightarrow z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma = (900 - 800)/40 = 2{,}5$

$P(x < 750 \text{ atau } x > 900) = P(z < -1{,}25) + P(z > 2{,}5)$

$= P(z < -1{,}25) + 1 - P(z < 2{,}5)$

$= 1 + P(z < -1{,}25) - P(z < 2{,}5)$

$= 1 + 0{,}1056 - 0{,}9938 = 0{,}1118$

LATIHAN SOAL :

Suatu jenis baterai mobil rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun. Bila dianggap umur baterai berdistribusi normal, carilah peluang suatu baterai tertentu akan berumur kurang dari 2,3 tahun.

TUGAS :

1). Diameter ball-bearing yg diproduksi sebuah pabrik memiliki mean 3cm dengan standard deviasi 0.005 cm. Pembeli hanya mau menerima jikalau ball bearingnya memiliki diameter 3.0±0.01cm.

a) berapakah persenkah dari produksi pabrik tersebut yg tidak bisa diterima pembeli?

b) jikalau dalam sebulan pabrik tsb memproduksi 10000 ball-bearing, berapa banyak yg harus dibuang tiap bulan karena ditolak pembeli?

2). Sebuah pengukur diameter bola besi dipasang secara otomatis dalam sebuah pabrik. Pengukur tsb hanya akan meloloskan diameter bola 1.50±d cm. Diketahui bahwa bola produksi pabrik tersebut memiliki diameter yg terdistribusi normal dengan rata-rata 1.50 dan standard deviasi 0.2 cm. Jikalau diinginkan bahwa 95% produksinya lolos seleksi berapakah nilai d harus ditetapkan?